5.1 密度 2020年6月12日10点28分

令为平面的子集.在处的密度为

其中是半径和中心的闭合圆盘.经典的勒贝格(Lebesgue)密度定理告诉我们,对于Borel集F,该极限存在,当时,该极限等于1;当时,该极限等于0,除了面积为0的一组之外.换句话说,对于在F中典型点x，以x为中心的小圆盘几乎完全被F填充,但是如果x在F之外,则以x为中心的小光盘通常包含很少的F（见图5.1）.



图5.1 Lebesgue密度定理.点x在F中,如果r小,则接近1. y点位于F之外,如果r小,则接近于0.

类似地,如果F是平面上的平滑曲线,并且是的一个点(不是端点),则对于小, 接近于的直径,且

如果,则此极限显然为0.

这样的密度定理告诉我们,在面积或长度的意义上,集合F中有多少集中在x附近.同样,研究分形的密度是很自然的-如果F具有维度,那么的s维Hausdorff测度如何随变化.我们看这个问题,当F是的s集且时(0集是有限的点集,几乎没有什么可说的,本质上是面积,所以 ,我们处于Lebesgue密度情况（5.1））.

我们定义s集F在点处的上界和下界密度

且

(注意).如果,则说在处密度,并且我们将作为共同值.

的点x称为F的规则点,否则x是不规则点.如果-几乎所有点（即除一组-测度0之外的所有点）都是规则的，则称s集为规则的，如果-几乎所有点都是不规则的,则称其为不规则的.(请注意,对于集合,“不规则”并不意味着“非规则”！）我们将看到，一个基本的结果是，除非是整数，否则s集F必须是不规则的.但是,如果为整数,则s集将分解为规则部分和不规则部分.粗略地讲,规则的1集由有限长度的可校正曲线的一部分组成，而不规则的1集则完全断开且呈粉尘状,通常为分形形式.

命题5.1

令为中的s集.则

对-几乎所有成立

对-几乎所有成立.

有时我们需要将集合的密度与某些子集的密度相关联.令F为s集,令E为F的Borel子集.则

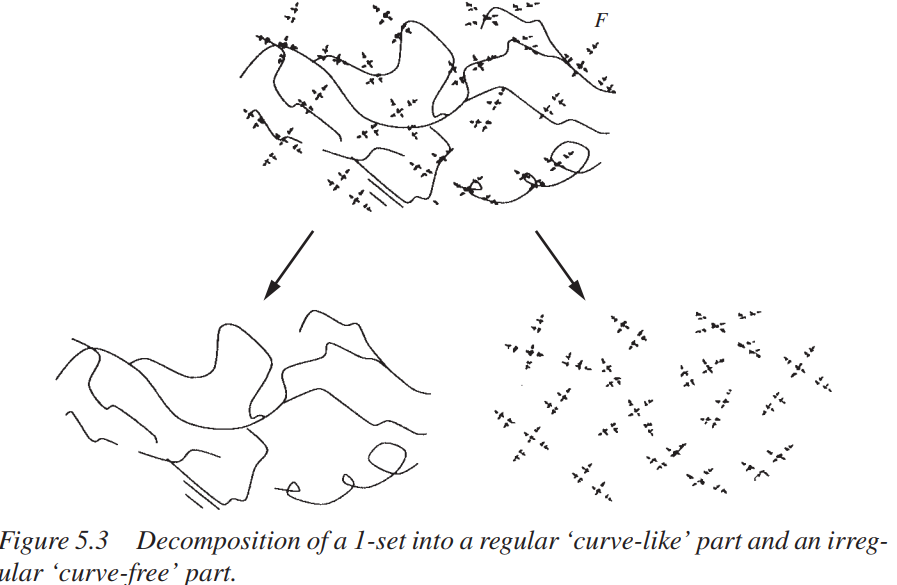
对于E中几乎所有x,我们都有

根据命题5.1(a),令给出

因此,从规则性的定义来看,如果E是集F()的子集,如果F是规则的则E是规则的,如果F是不规则的,则E是不规则的.特别是,规则集和不规则集的交集具有零测量值.

定理5.2 令为的s集.除非s是整数,否则F是不规则的.

5.2 1集结构



如第5.1节所述，非整数维数集必须是不规则的.整维集的情况更为复杂.下面的分解定理（如图5.3所示）使我们能够将1集分解为规则和不规则部分，以便我们可以分别分析每个集合并将其重组而不影响密度特性。

分解定理5.3 令F为1集. F的规则点集形成规则集,不规则点集形成不规则集.

规则和不规则1集的例子比比皆是.平滑曲线是规则的,为我们提供了经典几何形状,例如圆或椭圆的周长.另一方面,图0.4的迭代结构给出了不规则的1集,这是一个完全断开的分形.这是典型的–正如我们将看到的，规则的1集是由曲线段组成的，而不规则的1集是类似灰尘且“无曲线”的,即与长度为零的任何(有限长度)曲线相交.

要研究1集,我们需要一些关于曲线的事实.就我们的目的而言,曲线或约旦曲线C是连续注入(一对一函数)的图像,其中是适当的闭合区间.根据我们的定义,曲线不是自相交的,具有两端并且是平面的紧密连接的子集.曲线C的长度由多边形近似给出:

其中,最高点在C的所有剖分点沿着曲线的顺序.如果长度为正且为有限,我们称C为可校正曲线.

推论5.4 如果C是可校正的曲线,则.

推论5.5 可校正曲线是规则1集.

命题5.6 曲线状1集是规则1集.

很自然地引入一个补充定义:如果1集与每条可校正曲线的交点具有-测度零,则称其为无曲线[curve-free].

命题5.7 不规则1集是无曲线.

命题5.8 令为的无曲线1集.那么几乎满足所有.

定理5.9

的1集是不规则的当且仅当其本身是无曲线.

的1集是规则的当且仅当其本身是曲线状集合与-测度零集合的并集.

**5.3 s集的切向量** 2020年6月18日09点44分

假设平滑曲线C在x处有一个切线(在经典意义上).这意味着在x附近,C集中在两个截然相反的方向上.关于典型点的s集的方向分布可以说什么？ s集的切线是否有有意义的定义？何时存在此类切线？

切线定义的任何一般化都应反映出一系列正测度局部方向分布——对于我们所考虑的复杂性,无法涉及所有附近点的定义;我们必须满足于几乎所有点的条件.我们说的s集F在x处，方向上有一个切线,其中是单位矢量,如果

对于每个角度,

其中是顶点为的双扇形,由那些y组成,使得线段与或最多成𝜑角(见图5.4). 因此,对于方向的切线,（5.8）要求F的大部分位于x附近,其中,通过(5.9),接近x的可忽略量位于任何双扇形之外(见图5.5).

命题5.10 可校正曲线C几乎在所有点处都有切线.

命题5.11 的规格1集几乎在所有点处都有切线.

命题5.12 不规则1集的几乎在所有点上都不存在切线.

现在我们研究的非整数s集,正如我们已经看到的那样,它必然是不规则的.对于,相切问题不是特别有趣,因为平滑曲线中包含的任何集合都将自动满足(5.9),其中𝜽的方向是曲线在x处的切线.例如,被视为平面子集的中间三分Cantor集F是一个()集,对于F中的所有x都满足(5.8)和(5.9),并且𝜑> 0，其中𝜽是指向集合的向量.另一方面,如果F是两个均匀Cantor集的笛卡尔积,每个都通过从区间中心重复去除的比例而形成,则稍加计算(请参阅第7章)即可得出F 是的s集,且在任何点都没有切线.

中的s集没有切线至少是合理的,这种集是如此之大,以至于它们从一个典型点向许多方向辐射,因此(5.9)不能成立.在以下命题中对此进行了精确说明.

命题5.13 如果F是中的s集,且,则在F的几乎所有点处均不存在切线.